

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE

5 mai 2025

Probă scrisă MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $x^2 + mx - 2 = 0$, $\Delta = m^2 + 8$ $\Delta > 0$, pentru orice număr real m , deci ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte	2p 3p
	b) $A(-1 - \sqrt{3}, 0)$, $B(-1 + \sqrt{3}, 0)$, deci $AB = 2\sqrt{3}$ Cum $V(-1, -3)$, obținem $VA = VB = 2\sqrt{3}$, deci triunghiul VAB este echilateral	2p 3p
	c) $f(x) = x_i$, cu $\Delta_i = \Delta + 4x_i$, $i = \overline{1, 2}$; $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = -2$, pentru orice număr real m $\Delta_1 + \Delta_2 = 2(m-1)^2 + 14 > 0$, $\Delta_1 \Delta_2 = m^2(m-2)^2 + 4(3m^2 - 8m + 8) > 0$, de unde obținem $\Delta_1 > 0$ și $\Delta_2 > 0$, deci ecuațiile $f(x) = x_i$, $i = \overline{1, 2}$, au câte două soluții reale distincte și, cum $x_1 \neq x_2$, obținem că mulțimea $f^{-1}(\{x_1, x_2\})$ are 4 elemente, pentru orice număr real m	2p 3p
2.	a) Segmentele AB și MN au același mijloc, de unde obținem că patrulaterul $ANBM$ este paralelogram, deci $BN \parallel AM$ Segmentele AC și MP au același mijloc, de unde obținem că patrulaterul $AMCP$ este paralelogram, deci $CP \parallel AM$, de unde obținem $BN \parallel CP$	2p 3p
	b) $\Delta MTN \sim \Delta MCP$, de unde obținem $\frac{TN}{CP} = \frac{MN}{MP}$ $\Delta MBN \sim \Delta MQP$, de unde obținem $\frac{BN}{QP} = \frac{MN}{MP}$, deci $\frac{TN}{CP} = \frac{BN}{QP}$ și, cum $BN = CP = AM$, obținem $AM^2 = PQ \cdot NT$	2p 3p
	c) $\sphericalangle CBM = \sphericalangle MBD$ și $DE \parallel BC$, deci $BD = MD$, de unde obținem că $ANBM$ este dreptunghi și, cum QE este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic MPQ , obținem $EQ = \frac{MP}{2}$ $EQ = \frac{NP - NM}{2}$ și, cum $BCPN$ este paralelogram și $NM = AB$, obținem $EQ = \frac{BC - AB}{2}$, adică $2EQ = BC - AB$	3p 2p

1	a) Fie $a, b \in M = [0, +\infty)$ $\begin{array}{l} \Rightarrow e^a \geq 1 \\ e^b \geq 1 \end{array} \quad \Rightarrow e^a + e^b - 1 \geq 1$ $\Rightarrow \ln(e^a + e^b - 1) \geq 0 \Rightarrow \ln(e^a + e^b - 1) \in M \Rightarrow a * b \in M$	2p
	b) Legea de compoziție $*$ este asociativă dacă $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$ $x * (y * z) = x * (\ln(e^y + e^z - 1)) = \ln(e^x + e^y + e^z - 2)$ $(x * y) * z = (\ln(e^x + e^y - 1)) * z = \ln(e^x + e^y + e^z - 2)$ deci legea este asociativă.	2p 3p
	c) $a * a = \ln(2e^a - 1)$ $a * a * a = \ln(3e^a - 2)$ Demonstrație prin inducție că $P(n) : \underbrace{a * a * \dots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = \ln(ne^a - (n-1)), n \geq 1$ este adevărată. $\underbrace{a * a * \dots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$ devine $\ln(ne^a - (n-1)) = 2a$ $ne^a - (n-1) = e^{2a} \Rightarrow e^{2a} - ne^a + n - 1 = 0$. Notăm $e^a = x$ și obținem ecuația de gradul doi $x^2 - nx + n - 1 = 0$ care are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = n - 1$. obținem $a = 0$ sau $a = \ln(n - 1)$	2p 3p
2	a) $F'(x) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right)' = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{4x^2 + 4x + 1}{3}}$ $= 4 \cdot \frac{1}{4x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{x^2 + x + 1} = f(x)$ deci F este o primitivă a funcției f.	2p 3p
	b) $Aria = \int_0^1 (2x+1)f(x)dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$ $= \ln(x^2+x+1) \Big _0^1 = \ln 3.$	3p 2p
	c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} (F(n) - F(-n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg\left(\frac{2n+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg\left(\frac{-2n+1}{\sqrt{3}}\right) \right) =$ $= \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\pi}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$	3p 2p

<i>Itemul de completare elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i> - menționarea competenței/competențelor specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p